**Lecture 6**

**1. SECOND ORDER HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS**

Let the left-hand side of the equation



is a homogeneous function of arguments y, y’ y”, namely

, (1)

where *p* and *q* areconstant numbers.

If  and  are two solutions of the homogeneous equation (1), then

, (2)

is also a solution, where,  and С2 are arbitrary constants.

We seek a solution in the form

 (3)

where r is the unknown parameter.

We substitute into the equation (1)

**.

It is known that  isn’t zero for all values of *x*, so

** (4)

This equation is called the ***characteristic equation*** of second order homogeneous differential equations with a constant coefficients.

Solving differential equations whose characteristic equation has real roots

Second-order homogeneous differential equations with a constant coefficients can be solved using the following process:

1. Write down characteristic equation: **.

2. Solve for *r* and write down the general solution as follows

1. Characteristic equation havedistinct real roots and. Then the differential equation  has two different particular solutions  and . So:

 (4)

is general solution of homogeneous differential equation.

**Example.** Solve the differential equation .

***Solution***. It is understood that,



коэффициенттері  екенін анықтап, сипаттамалық теңдеуін жазамыз:

.

Теңдеу түбірлерін  тауып, (4) теңдеудегі орнына қойып, теңдеудің жалпы шешімін табамыз

.

b) Characteristic equation haveone repeated real root . Then the differential equation  has two different particular solutions  and . So

 (5)

is general solution of homogeneous differential equation.

**Example.** Solve the differential equation

, .

***Solution***. It is understood that,

.

Теңдеу  теңдеумен мәндес, түбірлері  еселі, (5) теңдеудегі орнына қойып теңдеудің жалпы шешімін табамыз

.

Енді берілген бастапқы шарттан еркін тұрақтыларды табамыз. Алдымен жалпы шешімнің туындысын табайық:

.

Айнымалылардың мәндерін орнына қойып жүйе аламыз, жүйені шешіп еркін тұрақтыларды табамыз:



Сонда берілген дифференциалдық теңдеулердің берілген бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімі:

.

c)Characteristic equation havecomplex roots and Then the differential equation  has two different particular solutions  and . So

. (6)

is general solution of homogeneous differential equation.

**Example.** Solve the differential equation

.

***Solution***. It is understood that,

. Characteristic equation is

.

.

Solutions of characteristic equation are

 

Then,  екенін көреміз. (6) теңдеудегі орнына қойып теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

.

**2. SECOND ORDER NON-HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS**

These have the form

, (7)

where *f*(*x*) will be a simple function such as a polynomial, exponential or trigonometric function.

The general solution of (7) is given by

, (8)

where  is the solution of the corresponding homogeneous equation теңдеудің жалпы шешімі, and  is the complementary solution of (7).

We know how to can be found .

Consider the way in finding . The particular integral *y* is calculated by making an educated guess.

1. Let *f*(*x*) is a polynomial ,

.

Then the solution  is sought in the form

 .

Where  is a polynomial of the same degree as , and  is the number of zero solutions of the corresponding characteristic equation.

We put  into the differential equation and solving by equating coefficients.

**Example.** Solve the differential equation

.

***Solution***. Сәйкес біртекті теңдеудің  жалпы шешімі (алдыңғы пунктте табылған): .

Сипаттамалық теңдеудің  түбірлері . Бұл түбірлер арасында нөл жоқ болғандықтан , көпмүше, яғни дербес шешім түрі:

,

мұнда, *А* мен *В* белгісіз коэффициенттер.  функциясының бірінші және екінші ретті туындыларын тауып теңдеуге қоямыз:

,

ықшамдап, , дәрежелері бірдей айнымалы коэффициенттерін теңестіріп жүйе шешеміз:



Сонда дербес шешім табылады: .

Табылған мәндерді (8) қойып берілген теңдеудің жалпы шешімін табамыз

.

2. Let *f*(*x*) is exponential multiplied by a polynomial .

Then the solution  is sought in the form

 .

Where  is a polynomial of the same degree as , and  is the number of -solutions of the corresponding characteristic equation.

We put  into the differential equation and solving by equating coefficients.

**Example.** Solve the differential equation 

***Solution***. Сәйкес біртекті теңдеудің  жалпы шешімі (алдыңғы пунктте табылған): .

Сипаттамалық теңдеудің түбірлері  арасында берілген теңдеудің оң жағындағы  өрнектегідей бір түбір бар,  сондықтан , көпмүше бірінші дәрежелі, яғни дербес шешім түрі:

,

мұнда, *А* мен *В* белгісіз коэффициенттер.  функциясының бірінші және екінші ретті туындыларын тауып теңдеуге қоямыз, ықшамдап,



дәрежелері бірдей айнымалы коэффициенттерін теңестіріп жүйе шешеміз:



Сонда дербес шешім табылады: .

Табылған мәндерді (8) қойып берілген теңдеудің жалпы шешімін табамыз

.

3. Let *f*(*x*) is trigonometric function

,

where  are known numbers.

Then the solution  is sought in the form

 ,

where A and B are unknown coefficients, and  is the number of -solutions of the corresponding characteristic equation.

We put  into the differential equation and solving by equating coefficients.

**Example.** Solve the differential equation .

***Solution***. Сәйкес біртекті теңдеудің  жалпы шешімі (алдыңғы пунктте табылған): .

Сипаттамалық теңдеудің түбірлері , арасында берілген теңдеудің оң жағындағы  өрнектегідей түбірі жоқ, сондықтан , яғни дербес шешім түрі:

,

Осы функцияның бірінші және екінші ретті туындыларын тауып теңдеуге қоямыз, ықшамдап,



тригонометриялық функциялар коэффициенттерін теңестіріп, жүйе шешеміз:



Сонда дербес шешім табылады: .

Табылған мәндерді (8) қойып берілген теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

.